6. Συμπαγείς Μετρικοί Χώροι

Άσκηση 1.

(i) Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και A,B συμπαγή υποσύνολα του X. Να αποδείξετε ότι $A\cap B$ και $A\cup B$ είναι συμπαγή υποσύνολα του X.

(ii) Έστω (X,d) ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $x,y\in X$ με $x\neq y$. Ορίζουμε τα σύνολα $A=X\setminus B_d(x,2)$ και $B=X\setminus B_d(y,3)$. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $A\cup B$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X.

Άσκηση 2.
Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $K\subset X$. Να αποδείξετε ότι K συμπαγές (δηλαδή, κάθε $(d-)$ανοιχτή κάλυψη του K έχει πεπερασμένη υποκάλυψη) **αν και μόνο αν** ο μετρικός υπόχωρος (K,d_K) είναι συμπαγής (δηλαδή, κάθε d_K-ανοιχτή κάλυψη του K έχει πεπερασμένη υποκάλυψη).

Άσκηση 3.

(i) Αποκλειστικά και μόνο με τη χρήση του ορισμού να αποδείξετε ότι τα σύνολα $\mathbb{R}$, $(a,b]$ και $[a,+\infty)$ δεν είναι συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

(ii) Να αποδείξετε ότι ένα μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

(iii) Στον $(\mathbb{R},|\cdot|)$ μπορούν τα σύνολα $(1,3]$ και $[0,3]$ να είναι ομοιομορφικά;

(iv) Να εξετάσετε αν

(a) η μοναδιαία σφαίρα $S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|_2=1\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $(\mathbb{R}^n,d_2)$

(b) το σύνολο $B=[0,1]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $(\mathbb{R},d_0)$ όπου d_0 η διακριτή μετρική.

(c) το σύνολο $C=\{x\in\mathbb{Q}:\sqrt{2}<x<\sqrt{3}\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $(\mathbb{Q},|\cdot|_{\mathbb{Q}})$. Να αποδείξετε επίσης, ότι το C είναι κλειστό και φραγμένο στο $\mathbb{Q}$.

(d) το σύνολο $D=\{(x,y):x\geq 1, 0\leq y\leq \frac{1}{x}\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $(\mathbb{R}^2,d_2)$, όπου d_2 η ευκλείδεια μετρική.

(e) το σύνολο $E=\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}B_{d_2}\left((0,0),1+\frac{1}{n}\right)$ είναι συμπαγές υποσύνολο το $(\mathbb{R}^2,d_2)$.

Άσκηση 4.
Αποδείξτε ότι:

(i) αν (X,d) μετρικός χώρος και αν μια οικογένεια $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ συνόλων του X έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, τότε το $\emptyset\notin(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

(ii) Η ακολουθία συνόλων $F_n=(0,\frac{1}{n}], n\in\mathbb{N}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, άλλα $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n=\emptyset$.

(iii) Αν $A=(0,1]$ να αποδείξετε ότι ο μετρικός χώρος $(A,|\cdot|_A)$ δεν είναι συμπαγής.

Άσκηση 5.
Να αποδείξετε ότι ένας μετρικός χώρος (X, d) είναι ακολουθιακά συμπαγής, αν κάθε μη κενό και άπειρο $A \subset X$, έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης (δηλαδή, κάθε άπειρο $A \neq \emptyset$ έχει $A' \neq \emptyset$).

Άσκηση 6.
Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A, B \subset X$ με $A, B \neq \emptyset$.

(i) Αν A συμπαγές, τότε υπάρχει $a \in A$ τέτοιο, ώστε $d(A, B) = d(a, B)$.

(ii) Αν A συμπαγές, B κλειστό και $A \cap B \neq \emptyset$, τότε $d(A, B) > 0$.

(iii) Αν A και B συμπαγή, τότε υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ τέτοια, ώστε $d(A, B) = d(a, b)$.

(iv) Αν A συμπαγές, τότε υπάρχουν $x, y \in A$ τέτοια, ώστε $\operatorname{diam} A = d(x, y)$.

Άσκηση 7.
Να αποδείξετε ότι:

(i) (X, d) ολικά φραγμένος μετρικός χώρος αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο A του X, και $\epsilon-$πυκνό στον X.

(ii) κάθε ολικά φραγμένος μετρικός χώρος είναι και φραγμένος. Ισχύει το αντίστροφο;

(iii) αν εφοδιάσουμε το σύνολο $\mathbb{N}$ με τις μετρικές $e(n, m) = |n - m|$ και $d(n, m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$, τότε οι μετρικές e, d είναι ισοδύναμες και επίσης, ο $(\mathbb{N}, d)$ είναι ολικά φραγμένος ενώ ο $(\mathbb{N}, e)$ δεν είναι ολικά φραγμένος (κατά συνέπεια η ιδιότητα του ολικά φραγμένου δεν αποτελεί τοπολογική ιδιότητα).

(iv) αν $f\colon (X, d) \to (Y, \rho)$ είναι μία ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, τότε η f απεικονίζει ολικά φραγμένα υποσύνολα του X σε ολικά φραγμένα υποσύνολα του Y.

(v) αν A, B ολικά φραγμένα υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X, d), τότε $A \cup B$ επίσης ολικά φραγμένο υποσύνολο του X (προφανώς, και η τομή είναι ολικά φραγμένο σύνολο).

(vi) αν A τυχαίο μη κενό υποσύνολο ενός ολικά φραγμένου μετρικού χώρου (X, d), τότε το A είναι ολικά φραγμένο (δηλαδή, η ιδιότητα του ολικά φραγμένου είναι κληρονομική).

Άσκηση 8.
Να αποδείξετε ότι αν A είναι ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, d) τέτοιο, ώστε κάθε ακολουθία στοιχείων του A να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο $\overline{A}$, τότε το $\overline{A}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X.

Άσκηση 9.
Έστω συμπαγής μετρικός χώρος (X, d) και $f\colon X \to X$ μια συσταλτική συνάρτηση (βλ. Φυλλάδιο 5, Άσκηση 5). Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο.

Άσκηση 10.
Να δώσετε παράδειγμα συνόλου σε κατάλληλο μετρικό χώρο, το οποίο να είναι:

(i) ολικά φραγμένο και μη συμπαγές.

(ii) πλήρες και μη ολικά φραγμένο.

(iii) ολικά φραγμένο και μη πλήρες.

(iv) πλήρες και μη συμπαγές.

(v) πλήρες και ολικά φραγμένο

Υποδείξεις Ασκήσεων

Άσκηση 1.

(i) Εφόσον τα A, B συμπαγή, είναι και κλειστά. Άρα, το $A \cap B$ είναι κλειστό. Από την άλλη μεριά $A \cap B \subset A$, και A συμπαγές. Άρα, $A \cap B$ συμπαγές. Τώρα, θα αποδείξουμε ότι $A \cup B$ είναι συμπαγές. Έστω $(G_i)_{i \in I}$ μία ανοιχτή κάλυψη του $A \cup B$. Τότε, αυτή είναι ανοιχτή κάλυψη του A και B. Συνεπώς, λόγω συμπάγειας των A, B υπάρχουν J_A, J_B πεπερασμένα υποσύνολα του I έτσι ώστε $A \subset \bigcup_{i \in I_A} G_i$ και $B \subset \bigcup_{i \in I_B} G_i$. Θέτοντας $J := J_A \cup J_B$ έχουμε ότι $A \cup B \subset \bigcup_{i \in J} G_i$. Άρα, το $A \cup B$ είναι συμπαγές.

(ii) Αρχικά, τα A, B κλειστά (ως συμπληρώματα ανοιχτών μπαλών). Επίσης, $A \cup B \subset X$ και όντας ο (X, d) συμπαγής αυτό σημαίνει ότι το σύνολο $A \cup B$ είναι συμπαγές υποσύνολο του (X, d).

Άσκηση 2.

Έστω ότι το K είναι συμπαγές και έστω $(B_i)_{i \in I}$ τυχούσα d_K-ανοιχτή κάλυψη του K. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει J πεπερασμένο υποσύνολο του I ώστε $K \subset \bigcup_{i \in J} B_i$. Εφόσον $B_i, i \in I$ d_K-ανοιχτό, υπάρχει A_i $(d-)$ανοιχτό ώστε $B_i = A_i \cap K, i \in I$. Επίσης,

$$K \subset \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap K) = \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap K \subset \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Οπότε, $(A_i)_{i \in I}$ είναι μία ανοιχτή κάλυψη του K. Άρα, από την υπόθεση ότι το K είναι συμπαγές, υπάρχει J πεπερασμένο υποσύνολο του I ώστε $K \subset \bigcup_{i \in J} A_i$. Συνεπώς,

$$K = \left(\bigcup_{i \in J} A_i \right) \cap K = \bigcup_{i \in J} (A_i \cap K) = \bigcup_{i \in J} B_i.$$

Άρα, $(B_i)_{i \in J}$ πεπερασμένη υποκάλυψη της $(B_i)_{i \in I}$ για το σύνολο K. Για την αντίστροφη κατεύθυνση η απόδειξη είναι ανάλογη της παραπάνω και αφήνεται για εξάσκηση στον αναγνώστη.

Άσκηση 3

(i) Το $\mathbb{R}$ δεν είναι συμπαγές σύνολο, καθώς η ανοιχτή κάλυψη $(-n, n)_{n \in \mathbb{N}}$ του $\mathbb{R}$ δεν έχει πεπερασμένη υποκάλυψη αυτού (εξηγήστε το). Επίσης, το διάστημα $(a, b]$ δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$, καθώς η ανοιχτή κάλυψη $\left(a + \frac{1}{n}, b + \frac{1}{2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ του $(a, b]$ δεν έχει πεπερασμένη υποκάλυψη αυτού(εξηγήστε το). Τέλος, το $[a, +\infty)$ δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$, καθώς η ανοιχτή κάλυψη $(-\infty, n)_{n \in \mathbb{N}}$ του $[a, +\infty)$ δεν έχει πεπερασμένη υποκάλυψη αυτού (εξηγήστε το).

(ii) Έστω A μη κενό και συμπαγές υποσύνολο του ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}$. Τότε, το A είναι φραγμένο. Οπότε, υπάρχουν τα $\sup A$ και $\inf A$ στον $\mathbb{R}$. Από την άλλη, τα $\sup A$ και $\inf A$ από τις θεμελιώδεις ιδιότητες των supremum και infimum, είναι σημεία επαφής του A, δηλαδή στοιχεία της $\overline{A}$ (βλ. ορισμό). Εφόσον, A κλειστό, προκύπτει ότι $A = \overline{A}$, και άρα, $\sup A, \inf A \in A$. Αυτό, σημαίνει ότι $\sup A = \max A$ και $\inf A = \min A$.

(iii) Τα σύνολα $(1,3]$ και $[0,3]$ δεν είναι ομοιομορφικά, καθώς αν ήταν, επειδή το $[0,3]$ είναι συμπαγές θα έπρεπε και το $(1,3]$ να είναι συμπαγές (αφού η συμπάγεια είναι μία τοπολογική ιδιότητα), άτοπο.

(iv) (a) Η S^{n-1} είναι συμπαγές σύνολο ως κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$.

(b) Το σύνολο $[0,1]$ δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του διακριτού μετρικού χώρου $(\mathbb{R}, d_0)$, αφού δεν είναι πεπερασμένο.

(c) Θα αποδείξουμε ότι το C δεν είναι ακολουθιακά συμπαγές. Εφόσον, το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στον $\mathbb{R}$, υπάρχει ακολουθία στοιχείων $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{Q}$ τέτοια, ώστε $x_n \to \sqrt{2}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε πως η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κείται του C. Τότε, αυτή δεν μπορεί να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο $\mathbb{Q}$, διότι αν είχε τότε και αυτή θα έπρεπε να συγκλίνει στο $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Εντούτοις, είναι προφανές ότι το σύνολο C φράσσεται από τους αριθμούς $\sqrt{2}$ και $\sqrt{3}$, καθώς το C είναι κλειστό στο Q, αφού γράφεται ως $C = [\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q}$.

(d) Αρκεί κανείς να παρατηρήσει ότι το εν λόγω σύνολο D δεν είναι φραγμένο, επειδή $\forall\ x \in [1, +\infty)$ ισχύει $\operatorname{diam}(D) \geq x - 1$, οπότε παίρνοντας το όριο για $x \to \infty$ έπεται ότι η διάμετρος του D δεν είναι πεπερασμένη. Συνεπώς, το D δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

(e) Το E είναι συμπαγές, αφού εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι ίσο με το σύνολο $\overline{B_{d_2}}((0,0),1)$ και αυτό είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $(\mathbb{R}^2, d_2)$, και άρα συμπαγές.

Άσκηση 4

(i) Αν υποθέσουμε ότι $\emptyset \in (F_i)_{i\in I}$, τότε η εν λόγω οικογένεια δεν θα μπορούσε να έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής (γιατί;).

(ii) Η $F_n = (0, \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$ ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, ως γνήσια φθίνουσα ακολουθία διαστημάτων. Εντούτοις, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$ (άμεσο απο την Αρχιμήδεια ιδιότητα).

(iii) Η ακολουθία $F_n = (0, \frac{1}{n}]$ αποτελείται από κλειστά στον υπόχωρο $(A, |\cdot|_A)$, επειδή γράφονται ως $F_n = [0, \frac{1}{n}] \cap (0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ και από το ερώτημα (ii) έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, αλλά $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$ και αυτό σημείνει ότι ο μετρικός χώρος $(A, |\cdot|_A)$ δεν είναι συμπαγής.

Άσκηση 5

Θα αποδείξουμε ότι ο χώρος (X, d) είναι ακολουθιακά συμπαγής. Έστω τυχαία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X και θα κατασκευάσουμε μια ακολουθία $k_1 < k_2 < \ldots$ φυσικών αριθμών και θα βρούμε και ένα $x \in X$ έτσι, ώστε $x_{k_n} \to x$. Θεωρούμε το σύνολο των όρων της εν λόγω ακολουθίας $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(a) Αν A πεπερασμένο, τότε υπάρχει $x \in X$ και μια ακολουθία $k_1 < k_2 < \ldots$ φυσικών αριθμών ώστε $x_{k_n} = x$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οπότε, $x_{k_n} \to x$.

(b) Αν A απέραντο, τότε από την υπόθεση το $A' \neq \emptyset$. Επιλέγουμε λοιπόν ένα $x \in A'$. <u>Επαγωγική Κατασκευή Υπακολουθίας</u>: Εφόσον $x \in A'$ υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x_{k_1}, x) < 1$

(Πρώτο επαγωγικό βήμα). Για το δεύτερο επαγωγικό βήμα θα εξετάσουμε αν υπάρχει ένα $k_2 > k_1$ ώστε $d(x_{k_2}, x) < \frac{1}{2}$. Προς τούτο θέτουμε το σύνολο

$$M := \left\{ m \in \mathbb{N} : m > k_1 \text{ και } d(x_m, x) < \frac{1}{m} \right\}$$

και αρκεί να αποδείξουμε ότι $M \neq \emptyset$. Υποθέτουμε ότι $M = \emptyset$. Τότε, $B_d(x, \frac{1}{2}) \cap A \subset \{x_{k_1}\}$ και άρα, το σύνολο $B_d(x, \frac{1}{2}) \cap A$ είναι πεπερασμένο πράγμα αδύνατον αφού $x \in A'$. Θέτοντας $k_2 = \min M$ έχουμε $k_2 > k_1$ και $d(x_{k_2}, x) < \frac{1}{2}$. Συνεχίζοντας επαγωγικά στο n, υπάρχει $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \dots$ ακολουθία φυσικών αριθμών ώστε $d(x_{k_n}, x) < \frac{1}{n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, $x_{k_n} \to x$, και έτσι έπεται το ζητούμενο.

Άσκηση 6

(i) Θυμίζουμε ότι $d(A, B) := \inf_{x \in A} d(x, B)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f \colon A \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = d(x, B), \ x \in A.$$

Εφόσον αυτή είναι συνεχής (για την ακρίβεια Lipschitz) και το A είναι συμπαγές, τότε η f λαμβάνει ελάχιστη τιμή στο A. Άρα, υπάρχει $a \in A$ ώστε

$$d(a, B) = f(a) = \min_{x \in A} f(x) = \min_{x \in A} d(x, B) = d(A, B).$$

(ii) Από το (i) υπάρχει $a \in A$ ώστε $d(a, B) = d(A, B) \geq 0$. Υποθέτουμε ότι $d(A, B) = d(a, B) = 0$. Επομένως, το $a \in \overline{B} = B$. Άρα, $a \in A \cap B$ και αυτό είναι άτοπο.

(iii) Είναι $d(A, B) := \inf_{(x,y) \in A \times B} d(a, b)$. Όμως, το infimum ενός συνόλου, είναι σημείο επαφής αυτού. Κατά συνέπεια υπάρχει μια ακολουθία $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στοιχείων του $A \times B$ τέτοια ώστε $d(x_n, y_n) \to d(A, B)$. Εφόσον $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στοιχείων του A και το A είναι ακολουθιακά συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία αυτής $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ και $x \in A$ ώστε $x_{k_n} \to a$. Εφόσον τώρα η $(y_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στοιχείων του B και το B είναι ακολουθιακά συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία αυτής $(y_{k_{m_n}})_{n \in \mathbb{N}}$ και $b \in B$ ώστε $y_{k_{m_n}} \to b$. Αλλά, τότε $x_{k_{m_n}} \to a$. Συμπεραίνουμε λοιπόν (με χρήση της τριγωνικής ανισότητας) ότι $d(x_{k_{m_n}}, y_{k_{m_n}}) \to d(a, b)$. Όμως, από παραπάνω $d(x_n, y_n) \to d(A, B)$, άρα $d(x_{k_{m_n}}, y_{k_{m_n}}) \to d(A, B)$. Τέλος, από τη μοναδικότητα του ορίου $d(A, B) = d(a, b)$.

(iv) Ανάλογο με το ερώτημα (iv) και για αυτό το λόγο αφήνεται για εξάσκηση στον αναγνώστη.

Άσκηση 7

(i) Υποθέτουμε ότι ο μετρικός χώρος (X, d) είναι ολικά φραγμένος και έστω ένα $\epsilon > 0$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει A πεπαρασμένο υποσύνολο του X, ωστε για κάθε και $x \in X$, να υπάρχει $y \in A$ ώστε $d(x, y) < \epsilon$. Εφόσον, ο (X, d) ολικά φραγμένος, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ και $x_1, \dots, x_m \in X$ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{m} B_d(x_n, \epsilon)$. Θέτουμε λοιπόν $A := \{x_1, \dots, x_m\}$. Έστω $x \in X = \bigcup_{n=1}^{m} B_d(x_n, \epsilon)$. Τότε, υπάρχει $k \in \{1, \dots, m\}$ (άρα, και ένα $y := x_k$ στο A) ώστε $x \in B_d(x_k, \epsilon)$, οπότε $d(x, x_k) < \epsilon$ και έχουμε το ζητούμενο. Αντίστροφα, θα αποδείξουμε ότι ο μετρικός χώρος (X, d), για κάθε $\epsilon > 0$, καλύπτεται από πεπερασμένες το πλήθος μπάλες ακτίνας ϵ. Έστω λοιπόν ένα $\epsilon > 0$. Από την υπόθεση υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $A := \{x_1, \ldots, x_m\}$ το οποίο να είναι $\epsilon-$πυκνό στον (X, d), δηλαδή

$$\text{για κάθε } x \in X \text{ υπάρχει } y \in A \text{ ώστε } d(x, y) < \epsilon. \ (\star)$$

Θέτουμε την οικογένεια $\mathcal{C} = \{B_d(x_1, \epsilon), \ldots, B_d(x_m, \epsilon)\}$. Τότε, αυτή θα καλύπτει τον (X, d), διότι από την $(\star)$ για κάθε $x \in X$, υπάρχει $y \in A$ τέτοιο, ώστε $x \in B_d(y, \epsilon)$.

(ii) Έστω (X, d) ολικά φραγμένος μετρικός χώρος. Τότε, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_m$ με $X = \bigcup_{n=1}^{m} B_d(x_n, 1)$. Έτσι, για κάθε $x, y \in X$, υπάρχουν $k_1, k_2 \in \{1, \ldots, m\}$ με $d(x, x_{k_1}) < 1$ και $d(y, x_{k_2}) < 1$,αντίστοιχα. Συνεπώς, έχουμε

$$d(x, y) \leq d(x, x_{k_1}) + d(x_{k_1}, x_{k_2}) + d(x_{k_2}, y) < 1 + \operatorname{diam}(\{x_1, \ldots, x_m\}) + 1 := M > 0.$$

Οπότε, $\operatorname{diam}(X) \leq M < +\infty$. Το αντίστροφο δεν ισχύει, αν για παράδειγμα επιλέξουμε τον διακριτό μετρικό χώρο (X, d_0) ώστε το X απέραντο σύνολο, ο εν λόγω μετρικός χώρος είναι φραγμένος (αφού η διακριτή μετρική είναι φραγμένη) αλλά από την άλλη μεριά (X, d_0) όχι ολικά φραγμένος (γιατί;).

(iii) Εύκολα μπορεί να αποδείξουμε ότι οι μετρικές είναι ισοδύναμες (δηλαδή, κάθε $e-$συγκλίνουσα ακολουθία είνα $d-$συγκλίνουσα, και αντίστορφα). Ο μετρικός χώρος $(\mathbb{N}, e)$ δεν είναι ολικά φραγμένος αφού δεν είναι φραγμένος. Από την άλλη μεριά, ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathbb{N} = \bigcup_{n \leq n_0} B_d(n, \varepsilon)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Για $n_0 := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, έχουμε ότι

- αν $n < n_0$, τότε $n \in B_d(n, \varepsilon)$, και άρα έπεται το ζητούμενο.
- αν $n \geq n_0$, τότε $d(n, n_0) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n_0}\right| = \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, και άρα έπεται ξανά το ζητούμενο.

(iv) Έστω A ολικά φραγμένο υποσύνολο του X και θα αποδείξουμε ότι το $f(A)$ είναι ολικά φραγμένο, δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_m \in A$ ώστε $f(A) \subset \bigcup_{n=1}^{m} B_\rho(f(x_n), \varepsilon)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον η απεικόνιση f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$, να ισχύει $f(B_d(x, \delta)) \subset B_\rho(f(x), \varepsilon)$. Όμως, το A είναι ολικά φραγμένο, όποτε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_m \in A$ ώστε $A \subset \bigcup_{n=1}^{m} B_d(x_n, \delta)$. Εφαρμόζοντας την απεικόνηση f στον προηγούμενο εγκλεισμό παίρνουμε άμεσα το ζητούμενο.

(v) Το συμπέρασμα έπεται άμεσα από τον ορισμό του ολικά φραγμένου συνόλου.

(vi) Έστω A μη κενό υποσύνολο του X και έστω τυχαίο $\epsilon > 0$. Εφόσον, X ολικά φραγμένος, συνάγουμε ότι

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_d(x_i, \frac{\epsilon}{2}) = X,$$

για κατάλληλο σύνολο $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$, και $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το σύνολο

$$G = \{x \in B : B_d(x_i, \frac{\epsilon}{2}) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Τότε, το G είναι προφανώς μη κενό και πεπερασμένο. Έτσι, για κάθε $x \in G$, επειδή $B_d(x_i, \frac{\epsilon}{2}) \cap A \neq \emptyset$, επιλέγουμε ένα στοιχείο $a_x \in A$ τέτοιο, ώστε $d(a_x, x) < \frac{\epsilon}{2}$ $(\star)$.
Ισχυριζόμαστε ότι $A = \bigcup\limits_{x \in G} (B_d(a_x, \epsilon) \cap A)$ (δηλαδή, ότι το A καλύπτεται από πεπερασμένες το πλήθος d_A-ανοιχτές μπάλες). Φανερά ισχύει ο εγκλεισμός $\bigcup\limits_{x \in G} (B_d(a_x, \epsilon) \cap A) \subset A$. Από την άλλη μεριά, έστω $y \in A$. Τότε, επειδή $A \subset X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_d(x_i, \frac{\epsilon}{2})$, υπάρχει $x \in B$ με $y \in B_d(x, \frac{\epsilon}{2})$ ή αλλιώς $d(x, y) < \frac{\epsilon}{2}$ $(\star\star)$. Έτσι, το $x \in G$ και μάλιστα από τις σχέσεις $(\star)$ και $(\star\star)$ ισχύει

$$d(y, a_x) \leq d(x, y) + d(x, a_x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Συνοψίζοντας, υπάρχει $x \in G$ τέτοιο, ώστε $y \in B_d(a_x, \epsilon)$, και αφού $y \in A$ έχουμε ότι $y \in \bigcup\limits_{x \in G} (B_d(a_x, \epsilon) \cap A)$, και τούτο σηματοδοτεί το πέρας της λύσης μας.

Άσκηση 8
Αρκεί να αποδείξουμε ότι το $\overline{A}$ είναι ακολουθιακά συμπαγές. Έστω μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $\overline{A}$. Τότε, υπάρχει μια ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του A τέτοια, ώστε $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εφόσον η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κείται στο A, από την υπόθεση υπάρχει $a \in \overline{A}$ ώστε $y_{k_n} \to a$. Ισχυριζόμαστε ότι $x_{k_n} \to a$. Πράγματι, συμφωνα με τα παραπάνω, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$d(x_{k_n}, a) \leq d(x_{k_n}, y_{k_n}) + d(y_{k_n}, a) < \frac{1}{k_n} + d(y_{k_n}, a).$$

Παίρνοντας το όριο για $n \to +\infty$ στην προηγούμενη σχέση, συνάγουμε ότι $x_{k_n} \to a$, και έπεται το ζητούμενο.

Άσκηση 9
Θωρούμε την πραγματική συνάρτηση $g\colon X \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = d(x, f(x)),\ x \in X.$$

Εφόσον, η f είναι συνεχής, από την αρχή της μεταφοράς προκύπτει ότι η g είναι συνεχής (εξηγήστε το). Επειδή ο χώρος X είναι συμπαγής η συνάρτησ g έχει ελάχιστη τιμή, δηλαδή υπάρχει $x_0 \in X$ έτσι ώστε $g(x_0) = \min\limits_{x \in A} g(x)$. Ισχυριζόμαστε ότι x_0 μοναδικό σταθερό σημείο της f. Πράγματι, έστω αρχικά ότι x_0 όχι σταθερό σημείο της f, δηλαδή, $f(x_0) = y_0 \neq x_0$. Τότε, από την υπόθεση έπεται ότι

$$g(y_0) = d(y_0, f(y_0)) = d(f(x_0), f(y_0)) < d(x_0, y_0) = d(x_0, f(x_0)) = g(x_0),$$

άτοπο, αφού στο x_0 η g ελαχιστοποιείται. Τέλος, το x_0 μοναδικό σταθερό σημείο, διότι αν όχι, τότε θα υπήρχε κάποιο $z_0 \in X$ με $z_0 \neq x_0$ ώστε $f(z_0) = z_0$. Αλλά, τότε $d(x_0, z_0) = d(f(x_0), f(z_0)) < d(x_0, z_0)$, άτοπο.

Άσκηση 10

(i) Το $(0, 1)$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι ολικά φραγμένο (είναι φραγμένο στον ευκλείδειο) και μη συμπαγές (όχι κλειστό).

(ii) Το $[0, +\infty)$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι πλήρες (ως κειστό σε πλήρη μετρικό χώρο) και μη ολικά φραγμένο (όχι φραγμένο).

(iii) Το $(0, 1)$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ολικά φραγμένο (είναι φραγμένο στον ευκλείδειο) και μη πλήρες (όχι κλειστό).

(iv) Το $[0, +\infty)$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ πλήρες (κλειστό σε πλήρη μετρικό χώρο) και μη συμπαγές (όχι φραγμένο).

(v) Το $[0, 1]$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ πλήρες και ολικά φραγμένο (κλειστό και φραγμένο στον ευκλείδειο μετρικό χώρο ο οποίος είναι πλήρης).